

Année CH02 - Exercices de préparation

02.A. 1°)
$$\begin{aligned} AC^2 &= (-1+5)^2 + (5+2)^2 = 4^2 + 7^2 = 65 \\ AB^2 &= (3+5)^2 + (-1+2)^2 = 8^2 + 1^2 = 65 \\ BC^2 &= (-1-3)^2 + (5+1)^2 = 16 + 36 = 52 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} AC^2 = AB^2, \text{ donc} \\ AC = AB. \end{array} \right\} \text{ (pté par longueurs)}$$

Donc ABC est isocèle de sommet principal A.

2°)
$$\begin{aligned} AC^2 &= (-5-13)^2 + (3+1)^2 = 324 + 16 = 340 \\ AB^2 &= (-3-13)^2 + (-5+1)^2 = 256 + 16 = 272 \\ BC^2 &= (-5+3)^2 + (3+5)^2 = 4 + 64 = 68 \end{aligned}$$

O. $272 + 68 = 340$, i.e. $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B.

02.B 1°)
$$\begin{aligned} AB^2 &= (3+2)^2 + (6-1)^2 = 5^2 + 5^2 = 50 \\ BC^2 &= (4-3)^2 + (-1-6)^2 = 1 + 49 = 50 \\ AB^2 &= BC^2 \text{ et } AB \text{ et } BC \text{ pté (longueurs), donc } AB = BC. \end{aligned}$$

Donc ABC est isocèle de sommet principal B.

2°) K milieu de [AC] a pour coordonnées:

$$\left. \begin{aligned} x_K &= \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \\ y_K &= \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ Donc } K(1; 0).$$

3°) Notons x_D et y_D les coordonnées de D, symétrique de B par rapport à K. Par définition, K est le milieu de [BD].

Donc $x_K = \frac{x_B + x_D}{2}$, est-à-dire $1 = \frac{3 + x_D}{2}$

d'où $3 + x_D = 2$, donc $x_D = -1$

De même $y_K = \frac{y_B + y_D}{2}$, est-à-dire $0 = \frac{6 + y_D}{2}$

d'où $6 + y_D = 0$, donc $y_D = -6$

II Finalement D(-1; -6).

4°) On a [AC] et [BD] diagonales de même milieu K, donc ABCD est un parallélogramme.

De plus $AB = BC$ et un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs est un losange.
 // Donc $ABCD$ est un losange.

Q2.C 1°) $d(O; (DC)) = OH_1$, où H_1 est le projeté orthogonal de O sur (DC) .

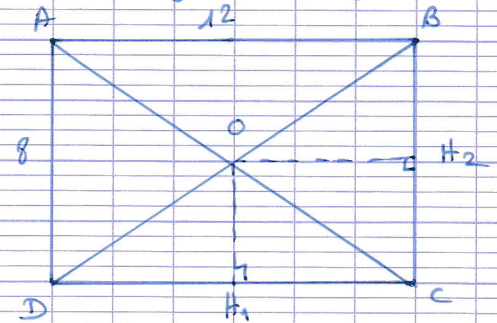
Soit H_2 le projeté orthogonal de O sur (BC) .

En utilisant la propriété "Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre", on montre que $H_1 O H_2 C$ est un rectangle.
 $(OH_1) \parallel (BC)$ donc $OH_1 = H_2 C = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ cm}$.

// Donc $d(O; (DC)) = 4 \text{ cm}$.

2°) De même, $d(O; (BC)) = OH_2 = H_1 C = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} \times 12$

// Donc $d(O; (BC)) = 6 \text{ cm}$



Q2.D 1°) $d(I; (OB)) = IH = x_I = 1$

2°) $d(I; (OA)) = IK = y_I = 1$

3°) $A_{\text{triangle}} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$

(Figure page suivante)

$$A_{AOB} = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

$$A_{OIA} = \frac{OA \times IK}{2} = \frac{4 \times 1}{2} = 2 \text{ cm}^2$$

$$A_{OIB} = \frac{OB \times IH}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = 1,5 \text{ cm}^2$$

$$4°) A_{IAB} = A_{AOB} - A_{OIA} - A_{OIB} = 6 - 2 - 1,5 = 2,5 \text{ cm}^2$$

$$5°) A_{IAB} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{AB \times IL}{2}$$

$$\text{Or } AB = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

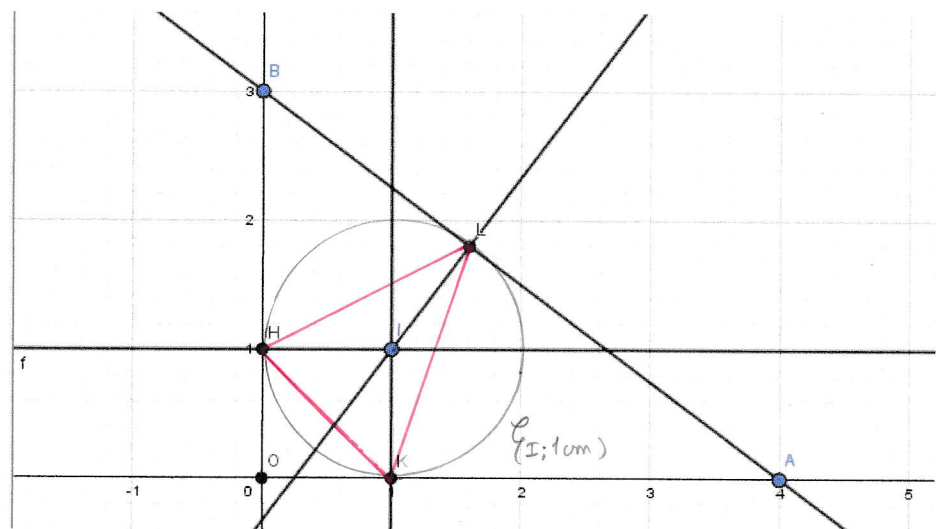
Donc $d_{IAB} = \frac{5 \times IL}{2} = 2,5$ (d'après le 1°)

$$5 \times IL = 2 \times 2,5 = 5$$

|| Donc $IL = 1 \text{ cm}$.

6°) Dans LHK , I est le centre du cercle circonscrit au triangle, car $IH = IK = IL = 1 \text{ cm}$, donc les points H, K, L sont sur le cercle de centre I et de rayon 1 cm .

- Point
- $A = (4, 0)$
 - $B = (0, 3)$
 - $H = (0, 1)$
 - $I = (1, 1)$
 - $K = (1, 0)$
 - $L = (1,6, 1,8)$
 - $O = (0, 0)$



Q2.E $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ et $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
 donc $\cos^2 \alpha + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$
 $\cos^2 \alpha + \frac{9}{25} = 1$

Donc $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} = \frac{4^2}{5^2} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$

|| finalement, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ($\cos \alpha \geq 0$ car l'angle est aigu).

02.F 1°) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$
 $= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha$
 $= 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$

2°) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$
 $= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha$
 $= 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

3°) $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha$
 $= 1 - 2 \sin^2 \alpha$

4°) $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)$
 $= \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha$
 $= 2 \cos^2 \alpha - 1$

02.G 1°) On rappelle le volume d'une pyramide (Site Maths lamella, espace collégien, cours de 3°, ch. 47 géométrie et volumes).

$$V = \frac{\text{base} \times h}{3}$$

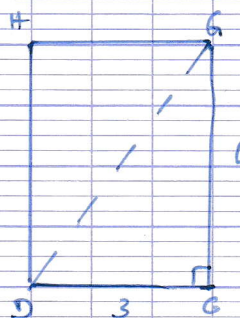
Ici, $\text{base} = 3$ $\text{base} = \text{ABCD} = 3 \times 3 = 9 \text{ cm}^2$
 $h = \text{CG} = 4 \text{ cm}$

|| $V_{\text{pyr}} = \frac{9 \times 4}{3} = 3 \times 4 = 12 \text{ cm}^3$

2°) Figure extraite : on dérive la face DCGH. Dans DCG rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$\text{DG}^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

|| Donc $\text{DG} = 5 \text{ cm}$.



3°a) Dans ADG rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore on a : $\text{AG}^2 = \text{AD}^2 + \text{DG}^2$

$$\text{AG}^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$$

$$\text{AG} = \sqrt{34} \text{ (on ne peut pas simplifier)}$$

$$\begin{array}{r} 34 \overline{) 2} \\ 17 \overline{) 17} \\ 1 \end{array}$$

3°b) Dans ADG rectangle en D, $\cos \widehat{\text{DAG}} = \frac{\text{AD}}{\text{AG}}$
 $\cos \widehat{\text{DAG}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$, donc $\widehat{\text{DAG}} = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right) \approx 59^\circ$

(on peut aussi utiliser le sinus ou la tangente)